

東北大学 工学部 機械知能・航空工学科
2020年度 クラス C D

情報科学基礎 I

3. 数の表現 — 符号つき整数
(教科書1.2節)
+ 実数の表現 (教科書1.3節)

大学院情報科学研究科
鏡 慎吾

符号つき整数の表現

負の数の表示方法

素朴な方法 (符号と絶対値法)

通常我々は, 10進数の絶対値の前に $-$ をつけて負の数を表す.
同様に, 最上位ビットで符号を表し, 残りで絶対値を表せばよい

10111011



符号ビット: 絶対値

0: 正

1: 負

問題点:

- ゼロの表現が2通り存在する
- 加減算が煩雑になる

→ 通常は, 2の補数表示と呼ばれる方式が用いられる

「2の補数」表現による符号つき数

3ビットの場合:

2進のビット列 符号なし数 2の補数表現による符号つき数

111	7	-1
110	6	-2
101	5	-3
100	4	-4
011	3	3
010	2	2
001	1	1
000	0	0

- 一般にnビットの場合,
- $2^{n-1} \sim (2^{n-1} - 1)$
の範囲の数を表せる
- MSBが1であれば, 負
の数である

C言語では, 各種の整数型に符号なし, 符号付きの種類がある.

signed int, unsigned int
signed short, unsigned short
signed char, unsigned char

000から1ずつ減らして行ったときの表現を素直に考えるとよい

2の補数の定義

n ビットの 2 進数において, ある数 x の
「2の補数 (2's complement)」とは,

$$2^n - x$$

である

(8 ビットなら, $256 - x$ になる)

2の補数表示による n ビットの符号つき数とは,

- 非負の数 x ($0 \leq x \leq 2^{n-1} - 1$) を x の符号なし2進表示で,
- 負の数 $-x$ ($0 < x \leq 2^{n-1}$) を x の「2の補数」, すなわち $(2^n - x)$ の符号なし2進表示で表したものである

2の補数が使われる理由

符号を気にせず加算・減算を実行することができる

$$\begin{array}{r} 01111010 \\ +) 11111111 \\ \hline 101111001 \end{array} \quad \begin{array}{l} = 122_{(10)} \\ = -1_{(10)} \\ = 121_{(10)} \end{array}$$

↑ はみ出したビットは捨てる

なぜこのようにうまく行くのか? → **循環している**のがミソ

8ビットの場合, 2^8 を足すと一巡して元の数に戻る

$2^8 - 1$ を足すと, 元の数より1少ない数に落ち着く

$2^8 - x$ を足すと, 元の数より x 少ない数に落ち着く (= 減算)

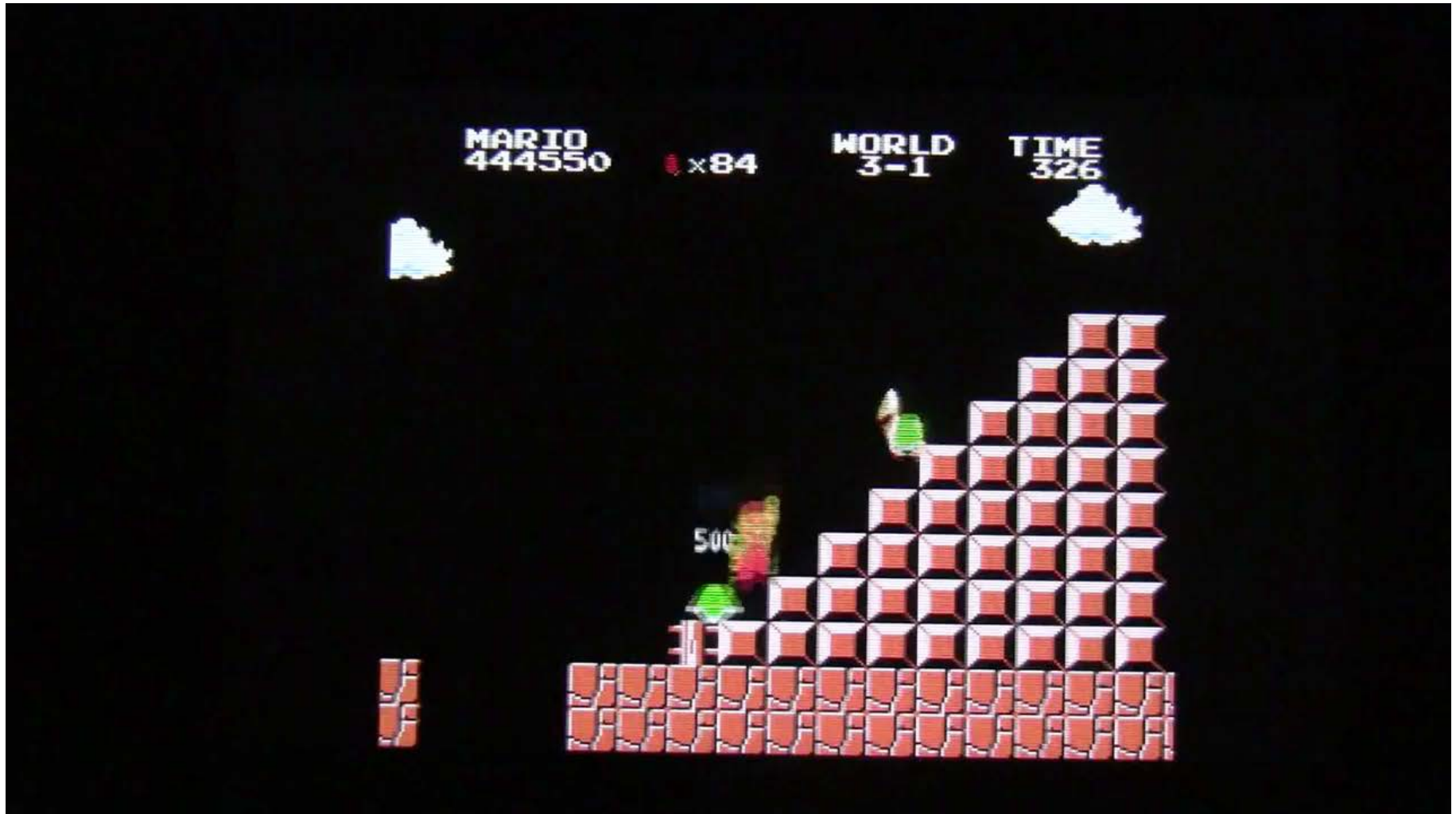
(符号と絶対値法だと, 数の並ぶ順序が変わってしまうのでこうはいかない:

0, 1, 2, ..., 126, 127, -0, -1, -2, ..., -126, -127)

例題

ファミリーコンピュータ用ゲーム「スーパーマリオブラザーズ」(任天堂(株), 1985年) には, 「無限1up」「無限増殖」などと呼ばれるテクニックが存在したことが知られている. すなわち, ある操作を行うことで, プレイヤストック数 (ゲームオーバになるまでに許容されるミス回数, 残機数) を際限なく増加させ続けることが可能であった.

一方, プレイヤストックを一定数以上に増やしすぎると, その後たった一度のミスでゲームオーバになってしまうという現象も生じた. 内部でどのような処理が行われていたか推測して述べよ.



<https://www.youtube.com/watch?v=FvbWaPfcGg>

例: アリアン5型ロケット打ち上げ失敗

1996年6月4日, 欧州宇宙機関が70億ユーロをかけて開発したアリアン5型ロケットは, 打ち上げ37秒後に爆発した



- 慣性基準装置が16ビット符号つき数からのオーバフローでエラーを起こした
- そのエラー診断番号がフライトデータだとみなされてブースターおよびエンジンのノズル方向が制御された
- 迎角が20度以上になり, 分解, 爆発した
- バックアップの慣性基準装置も同じエラーを起こしていた

J. L. Lions et al.: ARIANE 5, Flight 501 Failure, Ariane 501 Inquiry Board Report, 1996.
<http://www.bloomberg.com/news/photo-essays/2012-08-07/when-software-catastrophe-strikes>

符号つき整数の操作

- 加算はそのまま実行すればよい
- 減算 $a - b$ は, $-b$ を作ることができれば $a + (-b)$ で可能
 - どうやって作るか?

符号反転

$$\begin{aligned}x &= 30_{(10)} \rightarrow 00011110_{(2)} \\-x &= -30_{(10)} \rightarrow ?_{(2)}\end{aligned}$$

$$x \text{ の2の補数} = 2^n - x = \underbrace{(2^n - 1)}_{111\dots111} - x + 1$$

111...111 (1がn個並んだもの)

11111111	←	繰り下がりが起きない!
-) 00011110		
<hr/>		
11100001	←	結局 1 と 0 を反転させるだけ (「1の補数」と呼ばれる)
11100001		
+) 00000001	←	それに1を足すと, 符号反転結果が得られる
<hr/>		
11100010		

結論: 符号反転をするには, 各ビットを反転し, 1を加えればよい
正→負, 負→正 のどちらでもOK ($\because 2^n - (2^n - x) = x$)

10進の正負の数との変換

10進 → 2進:

- 正の数であれば, そのまま2進数で表示
- 負の数であれば,
 - 方法1) 絶対値を2進表示し, 符号反転
 - 方法2) 絶対値を 2^n から引いたものを2進表示

2進 → 10進:

- MSBが0であれば非負なので, そのまま10進数へ変換
- MSBが1であれば負なので,
 - 方法1) 符号反転処理をしてから10進数へ変換し, 負号をつける
 - 方法2) 10進数へ変換したものを 2^n から引いて, 負号をつける

例題

1. 10010110 (2進8ビット, 2の補数表現の符号つき数) を10進数に変換せよ
2. -50 (10進数) を 8 ビットの2の補数表現の符号つき2進数で表せ.

解答例

1. MSB = 1 なので負の数である.

方法1) まず符号反転処理してから10進に変換し, 負号をつける

$$\begin{array}{r} 10010110 \\ \rightarrow 01101001 \\ +) \quad \quad \quad 1 \\ \hline 01101010 \end{array} \rightarrow 106 \rightarrow -106$$

方法2) まず10進数に変換して, それを256から引いて負号をつける

$$\begin{array}{l} 10010110 \text{ (正数だと思って変換)} \\ \rightarrow 150 \\ \rightarrow -(256-150) = -106 \end{array}$$

2. **方法1)** 50 を符号反転する. $50 = 32 + 16 + 2 = 00110010_{(2)}$

なので, $11001101_{(2)} + 1 = 11001110_{(2)}$

方法2) $256 - 50 = 206 = 128 + 64 + 8 + 4 + 2 = 11001110_{(2)}$

実数

実数の表現

浮動小数点数を用いる (教科書1.3節)

考え方の基礎は, いわゆる科学的記数法 (指数表記)

- 6.02×10^{23}
 - 1.602×10^{-19}
- 仮数部 指数部

仮数部は1 以上10 未満にする (正規化)
仮数部の桁数がいわゆる有効数字

これの2進数版が浮動小数点数

- 仮数部も指数も有限ビットの2進数で表す
- 指数部の底は 10 ではなく 2
- 仮数部は 1 以上 2 未満にする (正規化)

IEEE 754 浮動小数点数

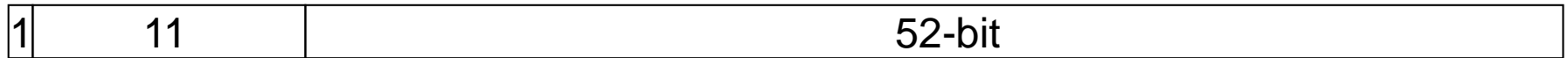
単精度 (C言語の float)



符号 指数部

仮数部

倍精度 (C言語の double)



符号 指数部

仮数部

$$\textcircled{-} 1.\boxed{01101101} \times 2^{\boxed{1100110}}$$

符号: 仮数部

0: 正

1: 負

浮動小数点数には誤差がつきもの

0 以上 7.0 以下の数を 0.7 間隔で出力する(つもり)

```
for (double x = 0.0; x <= 7.0; x += 0.7) {  
    printf("x = %f¥n", x);  
}
```

<https://wandbox.org/permlink/jBSnjPUWAoz4974J>

結果:

```
x = 0.000000  
x = 0.700000  
x = 1.400000  
x = 2.100000  
x = 2.800000  
x = 3.500000  
x = 4.200000  
x = 4.900000  
x = 5.600000  
x = 6.300000
```

← ?!?!?!?!??

練習問題

8ビットの符号つき2進数

(a) 01101100

(b) 11101101

をそれぞれ,

- 1) 符号を反転した数を, 8ビットの符号つき2進数で表せ
- 2) 10進数で表せ
- 3) 16進数で表せ
- 4) (a) と (b) を加算し, 8ビットの符号つき2進数で表せ

解答例

1) (a) 10010100 (b) 00010011

2) (a) 108 (b) -19

3) (a) 6c (b) ed

4) 01011001

- 1) ビット反転して 1 を足す.
- 2) 正の数は普通に変換する. 負の数は, 10進にしてから 2^8 から引くか, 符号反転してから10進にするか. (1)で符号反転済みなのだから後者の方が楽
- 3) 符号なし数とみなしてそのまま変換する. ちょっと戸惑ったかもしれないが, 16進数は2進数をより短く表示することを目的として使うものなので, 変換元の2進数の0と1の並びをそのまま反映させる.
- 4) 普通に筆算して9ビットめを無視する. 2)の結果を加算して2進数に直すのもよい