東北大学 工学部 機械知能・航空工学科
2015年度 5セメスター・クラスD

計算機工学

2. 数の表現 — 符号なし整数

(教科書1.1節)

大学院情報科学研究科
鏡 慎吾

http://www.ic.is.tohoku.ac.jp/~swk/lecture/

r 進数

10 進数:

0, 1, 2, … 9 の 10 個のシンボルを使って数を表す

$$1234_{(10)} = 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

同様に,

r 個のシンボルを使って表したものを r 進数と呼ぶ

$$1234_{(r)} = 1 \times r^3 + 2 \times r^2 + 3 \times r^1 + 4 \times r^0$$

シンボルの数 r を基数 (radix) と呼ぶ

2進数，8進数，16進数

10進数	2進数	8進数	16進数
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	a
11	1011	13	b
12	1100	14	c
13	1101	15	d
14	1110	16	e
15	1111	17	f
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12

10進数との変換

2進から10進: 定義どおりに計算する

$$1001_{(2)}$$
$$= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$= 9_{(10)}$$

10進から2進: 2のべき乗の和に分解する

[方法1] 下位ビットから決めていく

2) 37
2) 18 … 1
2) 9 … 0
2) 4 … 1
2) 2 … 0
2) 1 … 0
0 … 1 → $100101_{(2)}$

[方法2] 上位ビットから決めていく

37 = 32 + 5
= 32 + 4 + 1
= $100101_{(2)}$

方法2は，2のべき乗数を暗記していないとできない．しかし慣れるとこの方が早い

8進数，16進数との変換

8進数への変換: 3桁ごとに区切ってパターンを置き換える

001000110101011

1 0 6 5 3

(C言語では 010653)

16進数への変換: 4桁ごとに区切ってパターンを置き換える

1001000110101011

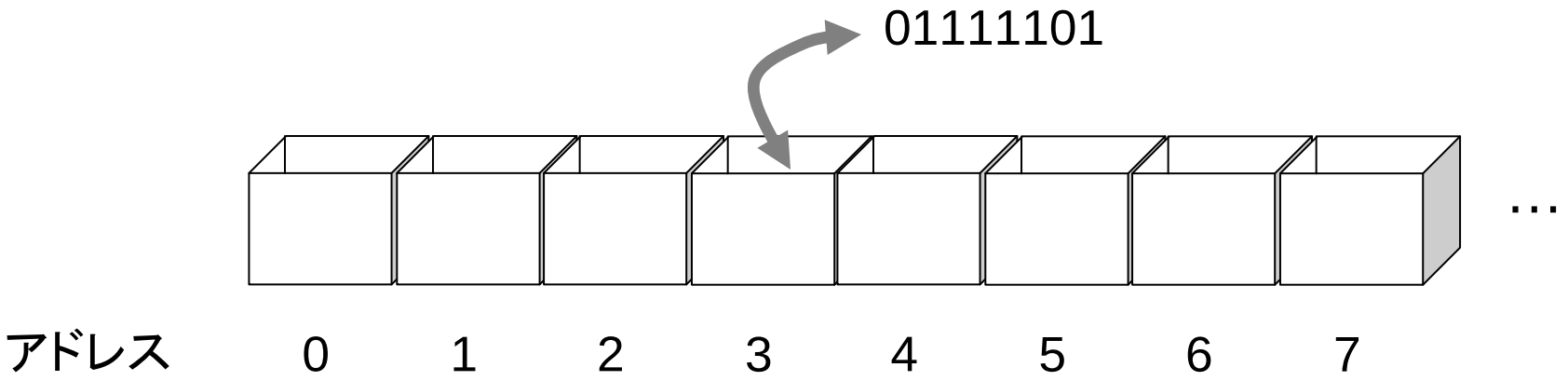
9 1 a b

(C言語では 0x91ab)

2進数への変換も，これらの逆の操作をするだけ

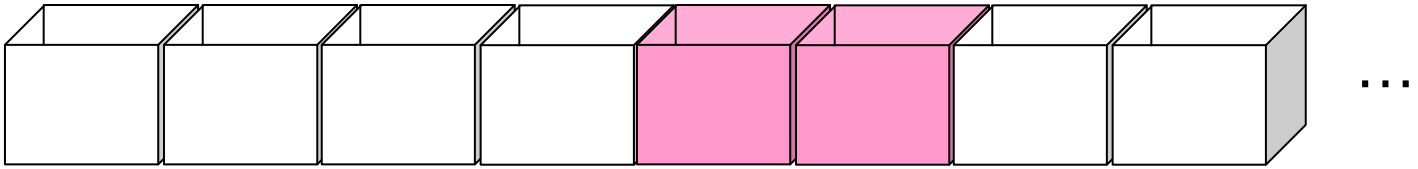
ビットとバイト

- 2進数の1桁を bit (binary digit) と呼ぶ
- 計算機の中では，有限の桁数でデータを表現しなくてはならない
- 基本単位: 1 byte = 8 bit (現代のコンピュータではほぼ常に)
- メモリは 1 バイトごとに区切られて，それぞれにアドレスがついている



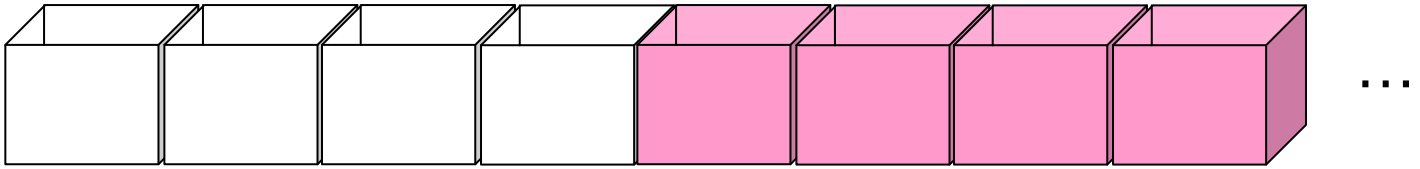
複数のバイトをまとめて扱う

メモリアドレス 4 に対する 2 バイト数値のアクセス



アドレス　0　1　2　3　4　5　6　7

メモリアドレス 4 に対する 4 バイト数値のアクセス



アドレス　0　1　2　3　4　5　6　7

複数ビットの呼び方

	ほとんどの32ビットプロセッサ	ほとんどの16ビットプロセッサ（と互換性を保つ32ビットプロセッサ）	通信分野	C の型名（最近のほとんどの計算機の場合）
8 bit	**byte**	**byte**	**octet**	`char`
16 bit	**half word**	**word**		`short int`
32 bit	**word**	**double word**		`int`
64 bit	**double word**			`long long int`

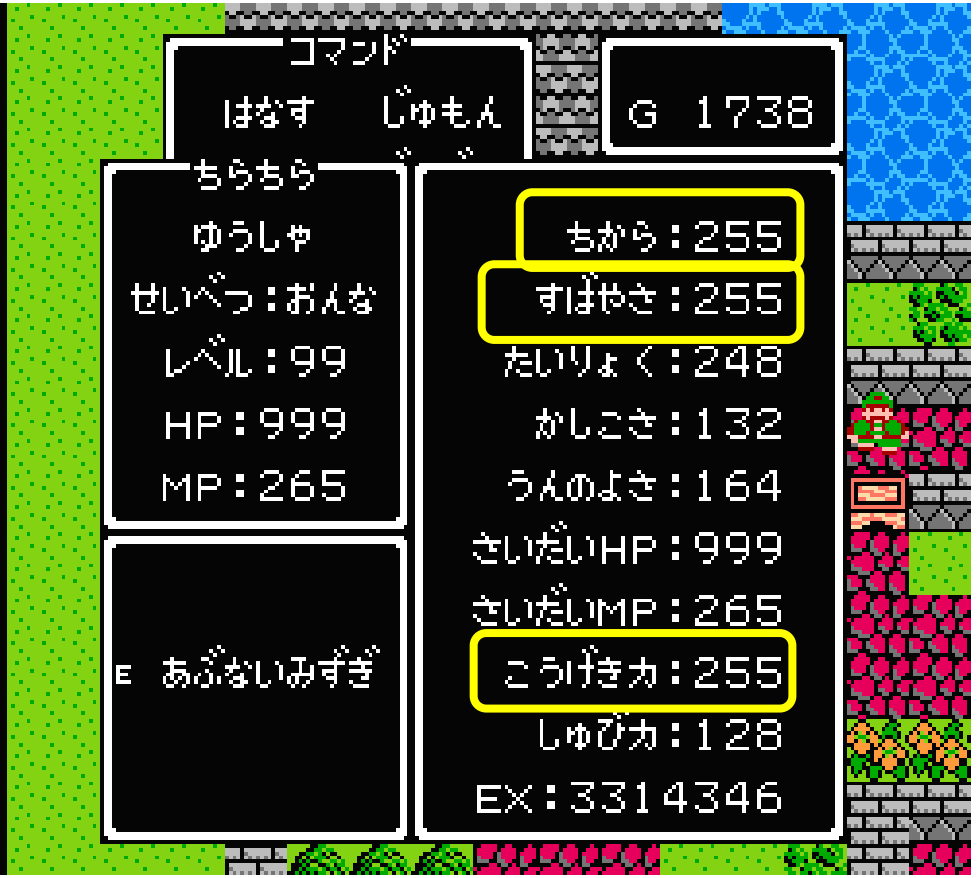
- 一度に処理できるサイズによって，16ビットプロセッサ，32ビットプロセッサ，などと分類する
- プロセッサによって呼び方が違う
- C言語の型のサイズすら，計算機によって違う

表せる数値の範囲（符号なしの場合）

- n ビットで，2^n 種類の数値を表すことができる
- nビット符号なし数: 0 ～ $2^n - 1$ を表す
  - 8ビット符号なし数: 0 ～ 255
  - 16ビット符号なし数: 0 ～ 65,535
  - 32ビット符号なし数: 0 ～ 4,294,967,295

- $2^{10} = 1024$ なので，2^{10} 倍を kilo で表す場合がある．この分野では，1k が 1024 なのか 1000 なのか注意が必要．
  - 同様に，2^{20} 倍 = mega，2^{30} 倍 = giga
- 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 程度までは覚えておくと便利
  - 「2^{24} はだいたい幾つか?」$2^{24} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^4$ だから，100万の 16 倍くらい，とすぐに見当がつく


コマンド
はなす じゅもん
つよさ どうぐ
かいだん しらべる
とびら とる
とんぬら
レベル 30
HP 180
MP 169
G 5389
E65535
※「りゅうおうの からだを
つらぬける つるぎが このよに
あるのだろうか……


コマンド
はなす じゅもん
G 1738
ちらちら
ゆうしゃ
せいべつ：おんな
レベル：99
HP：999
MP：265
E あぶないみずぎ
ちから：255
すばやさ：255
たいりょく：248
かしこさ：132
うんのよさ：164
さいだいHP：999
さいだいMP：265
こうげきりょく：255
しゅびりょく：128
EX：3314346

余談: 4ギガバイトの壁

32ビットプロセッサ（のほとんど）は，32ビット数を一度に操作することができ，メモリアドレスも 32 ビット数で表す．

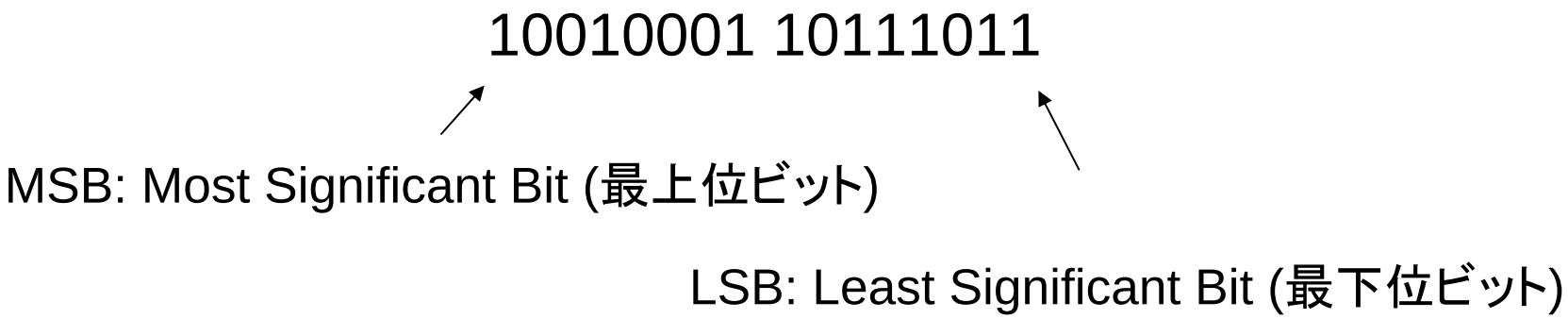
64ビットプロセッサ（のほとんど）は，64ビット数を一度に操作することができ，メモリアドレスも 64 ビット数で表す．

メモリアドレスを 32 ビットで表現するプロセッサは，
4,294,967,296バイト ≒ 4.3 ギガバイト までのメモリしか扱うことができない．

MSB と LSB

現在考えている桁数で最上位のビットと最下位のビットをそれぞれ MSB, LSBと呼ぶ.

例えば16ビットの場合,



算術演算

- 加算，減算，乗算，除算はいずれも 10 進数の場合と同じように筆算できる
- 通常，このような筆算を自分で計算する必要はほぼない．しかし，この原理を理解することは，演算回路の仕組みを理解する上で重要．

- オーバフロー（あふれ）に注意する必要がある
  - 8 ビットで計算しているときに，255 に 1 を足すと 0 になってしまう

加算・減算

加算: 10進では，各桁の加算結果が9を超えると繰り上がる
　　2進では，1を超えると繰り上がる

$$
\begin{array}{rll}
 & 1111\ \ 1 & \\
 & 01111010_{(2)} & = 122_{(10)} \\
+) & 00111011_{(2)} & = 59_{(10)} \\
\hline
 & 10110101_{(2)} & = 181_{(10)}
\end{array}
$$

減算: 10進では，繰り下がりで10を借りてくる.
　　2進では，2を借りてくる

$$
\begin{array}{rll}
 & \ \ 000010 & \\
 & 01\cancel{111}010_{(2)} & = 122_{(10)} \\
-) & 00111011_{(2)} & = 59_{(10)} \\
\hline
 & 00111111_{(2)} & = 63_{(10)}
\end{array}
$$

乗算・除算

加算・減算が理解できれば，基本的には同じである
- 九九は不要; AND だけが分かればよい

$$
\begin{array}{rl}
 & 1010_{(2)} \\
\times) & 1011_{(2)} \\
\hline
 & 1010 \\
 & 1010 \\
 & 0000 \\
 & 1010 \\
\hline
 & 1101110_{(2)}
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{l}
10_{(10)} \\
11_{(10)} \\
\\
\\
\\
\\
\\
110_{(10)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 1011_{(2)} \\
\hline
1011_{(2)}) & 01111010_{(2)} \\
 & 1011 \\
\hline
 & 10001 \\
 & 1011 \\
\hline
 & 1100 \\
 & 1011 \\
\hline
 & 1_{(2)}
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{l}
11_{(10)} \\
122_{(10)}/11_{(10)} \\
\\
\\
\\
\\
\\
\ldots 1_{(10)}
\end{array}
$$

ビットシフト演算

```
unsigned short a, b, x, y; // 16 bit

a = 0x1234; // 0001 0010 0011 0100
x = a >> 2; // 0000 0100 1000 1101

b = 0xcafe; // 1100 1010 1111 1110
y = b << 3; // 0101 0111 1111 0000
```

シフトによって空いたビットには 0 を詰める

- 10進数: 左 k 桁シフトは 10^k 倍，右 k 桁シフトは 10^{-k} 倍
- 2進数: 左 k ビットシフトは 2^k 倍，右 k ビットシフトは 2^{-k} 倍

  (ただしオーバフローが起きないことを前提とする; 端数は無視)

例題

ファミリーコンピュータ用ゲーム「ドラゴンクエストIV 導かれし者たち」((株)エニックス, 1990年) には，プレイヤがコインを購入し，スロットマシンやポーカーなどのゲームにそのコインを賭けることのできる「カジノ」と呼ばれるイベントが用意されていた.

コイン1枚は20ゴールド (ゴールドはゲーム世界における通貨単位) で購入できたが，838861枚を指定して購入すると合計わずか4ゴールドで買えてしまうという現象が生じた. このとき，内部でどのような処理が行われていたか推測して述べよ.

(2009年度期末試験)

例題解答例

20 [ゴールド/枚] × 838861 [枚] = 16777220 [ゴールド]

きっと有限ビット長表現によるオーバフローが原因であろうと推測してみる.

$2^8 = 256$
$2^{16} = 65536$ (256×256)
$2^{24} = 16777216$ (256×65536) ← !!
$2^{32} = 4294967296$ (65536×65536)

コインの対価を計算する際に 24 ビット長で計算が行われており,
オーバフローを考慮しない処理をしていたため,
16777220 – 16777216 = 4 [ゴールド] で買えたと考えられる.

練習問題

1. 2進数 00101100 を 10進数，16進数で表せ

2. 10進数 123 を 2 進数で表せ

3. プログラミング言語 Java のプログラムをコンパイルしたときに生成されるファイル(class ファイル) の最初の4 バイトをそれぞれ符号なしの2 進数だとみなすと，10 進表示で順に
   202　254　186　190
   となることが知られている．それぞれを16 進数で表し，同じ順に並べて書け．(2012年度期末試験)

練習問題 解答例

1. $00101100_{(2)} = (32 + 8 + 4)_{(10)} = 44_{(10)}$
   $= 2c_{(16)}$

2. $123_{(10)} = (64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1)_{(10)} = 01111011_{(2)}$

3. $202_{(10)} = ca_{(16)}$, $254_{(10)} = fe_{(16)}$, $186_{(10)} = ba_{(16)}$, $190_{(10)} = be_{(16)}$ より，cafebabe